2009.10.25 Ph.D Kyôto-39 Résumé; Tani R. Fra: I∴L∴P∴

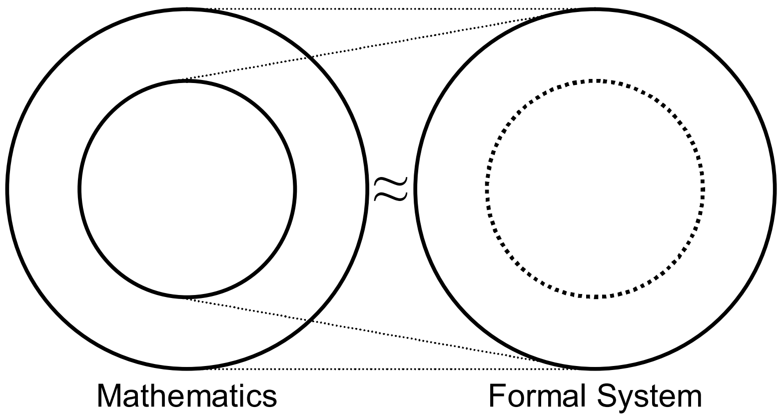
≪ゲーデルの不完全性定理≫

I

1　数学的と超数学的

形式的体系とは、（数学的）自然言語における数学的理論の構造を、ある形式的な構造の上に投射したもののことである。ここで形式的というのは、手続き的と表現しても同じことであり、極言すれば電子計算機が証明を実行、検算できることを指す。

形式的体系とは、数学の構造をある形式的な構造に反映させたものであるのだから、形式的体系はそれ自体として数学であると考えられる。ところが、形式的体系は数学の内部で構成されるものでもあるのだから、こう考えるかぎり、形式的体系を数学自体と同一視することはできない。形式的体系は全体であり、同時に部分でもある。



形式的体系を全体として考えるとき、形式的体系で証明することのできる命題は、自然言語でも証明することが可能である。このとき、形式的体系の内部で展開される数学は、われわれの自然言語における数学と何ら変わるところはないから、これを単に「数学的」と表現する。これに対して、形式的体系を部分として考えるとき、形式的体系自体を数学の対象として研究することが可能となる。この場合、形式的体系は数学と全然同一であるわけではないが、しかし形式的体系に数学の何ほどかの構造が反映されていることもまた事実であるので、数学を数学の対象とする、すなわち「超数学的」研究の可能性が拓かれてくるのである。

だが、（数学的）自然言語が形式的体系の構造を（超数学的に）記述することが可能であるのなら、形式的体系における形式的言語もまたそうすることが可能である（なぜなら、形式的言語には自然言語の構造が投射されている筈だから）。すなわち、形式的体系に対する超数学的分析の内容を、形式的体系の内部でも形式的に表現することができるのである。しかも、ある形式的体系が自己の内部で超数学を展開可能であるために、なにも形式的言語が数学全体を記述できるほど強力なものである必要はない。それどころか、形式的言語が自然数論を記述できる程度の表現力さえ有しているのなら、それで必要充分である。なぜなら、形式的体系に対する（多くの）超数学的命題を、自然数に対する形式的命題に投射して表現することができるからだ。

さて、数学は数学を記述することができる。すなわち、数学は自己言及することができる。それだけではない。形式的体系の内部で超数学を展開することが可能であるからには、形式的数学が形式的数学を記述する（形式的自己言及する）こともまた可能であると考えなくてはならない。すると、自然言語における自己言及のパラドクスが、全く形式的な手続きを通して形式的体系の内部に再現されてしまう。この文は、証明も反証もできない。

以上で示した事態が、自然数論を記述可能な幅広い形式的体系で成り立つ。殊に、プリンキピア・マテマティカの体系 PM（B. Russell, A. Whitehead）、集合論の公理系 ZF（E. Zermelo, A. Fraenkel）、また、これらの形式的体系に対して有限個の公理を追加した全ての体系では、体系が無矛盾であるかぎりかならず成立する。以下で与える形式的体系 P（K. Gödel）も、事態が成立する数多の体系の一例（そして、わけても単純なもの）にすぎない。

2　形式的体系 P

2.1　記号

使用できる記号は以下に示すものだけである。

対象記号：0　　数字の 0 を表す

函数記号：$'$　　自然数 n に対して、n' は n の後者（$n+1$）を表す

関係記号：$\in$　　$a \in b$ は、対象 a が集合 b の元であることを表す

論理記号：$\sim, \to, \forall$　　$\sim P : P$ でない　$P \to Q : P$ ならば Q　$\forall x P :$ 全ての x について P

括　弧：(,)　　句切りの括弧

変　数：

1 階の変数：$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \cdots$

2 階の変数：$\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \cdots$

3 階の変数：$\xi_3, \eta_3, \zeta_3, \cdots$

変数は、型ごとに可算個ずつ用意する。ある論理式に可算個の変数が出現することは、形式的体系 P においては許容されないが、しかし何個までというふうに個数を限定することもできないので、可算個用意するのである。

形式的体系 P は階型理論（型の理論）と呼ばれるシステムを採用しており、1 階の対象とは自然数、$n+1$ 階の対象とは n 階の対象の冪集合に元として含まれる集合のことである。そして、集合が対象を元として含むという関係は、$n+1$ 階の対象が n 階の対象を元として含むという関係に限定される。

2.2　論理式（文構成規則）

まず、対象式の概念を与える。

1　x が 0 または 1 階の変数であるとき、$x, x', x'', \cdots$ などの記号の組み合わせを 1 階の対象式と呼ぶ。

2　$0 < n$ のとき、n 階の変数のことを n 階の対象式と呼ぶ。

次に、論理式の概念を与える。形式的体系 P の論理式は、記号の有限列で表現される。

1　a が n 階の対象式、b が $n+1$ 階の対象式であるとき、$a \in b$ は論理式である。これを基本論理式と呼ぶ。

2　P, Q が論理式、x が変数であるとき、$\sim(P), (P) \to (Q), \forall x(P)$ は論理式である。

3　1 に対して 2 の操作を有限回適用したものは論理式であり、このようなもののみが論理式である。

2.3　公理群（公理スキーマ）

特定の論理式の集合を公理群として指定する。以下では括弧の省略や、$\neq, \exists, \leftrightarrow$ などの略記法を用いている。

A　**自然数の公理（ペアノの公理）**：

1　$\xi_1' \neq 0$

2　$\xi_1' = \eta_1' \to \xi_1 = \eta_1$

3　$\{0 \in \xi_2 \wedge \forall \xi_1(\xi_1 \in \xi_2 \to \xi_1' \in \xi_2)\} \to \forall \xi_1(\xi_1 \in \xi_2)$〔数学的帰納法の原理〕

B　**命題論理の公理**：

1　$P \to (Q \to P)$

2　$\{P \to (Q \to R)\} \to \{(P \to Q) \to (P \to R)\}$

3　$(\sim Q \to \sim P) \to (P \to Q)$

以上の公理図式に任意の論理式を代入したもの。

C　**述語論理の公理**：

1　$\forall x F(x) \to F(t)$

2　$\forall x(P \to F(x)) \to (P \to \forall x F(x))$

以上の公理図式に任意の論理式、変数などを代入したもの（但し、P は x を自由変数として含まない）。

D　**内包の公理**：

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow F(x))$$

以上の公理図式に任意の論理式、変数などを代入したもの（但し、$F(x)$ は y を自由変数として含まない)。

E　**外延の公理**：

$$\forall \xi_n(\xi_n \in \xi_{n+1} \leftrightarrow \xi_n \in \eta_{n+1}) \to \xi_{n+1} = \eta_{n+1}$$

以上の公理図式に任意の変数を代入したもの。

2.4　推論規則

形式的体系 P において可能な推論は以下に示す形を取るものだけに限定される。

1　前提 P と前提 $P \to Q$ から結論 Q を推論する。

2　前提 P から結論 $\forall xP$ を推論する。

形式的体系 P において、定義とは略記法のことである。たとえば、$a = b$ は $\forall \xi_n(a \in \xi_n \to b \in \xi_n)$ の省略表現である。ここで、イコールという記号は本当は用いられていないものとして理解されなければならない（なぜなら、われわれの形式的体系で使用可能な記号は先述したものに限定されるから)。つまり、$a = b$ と書くときも、本当は $\forall \xi_n(a \in \xi_n \to b \in \xi_n)$ と書いているつもりで $a = b$ と書かなくてはならないのである。

かくして、われわれの形式的体系 P が与えられたわけである。以上で与えた形式的体系は、自然数論を記述するための充分な表現力を有するに留まらず、通常の数学を記述するための充分な表現力を有する。すなわち、適当な定義を与えてやることで、順序関係、集合論的記法、実数、複素数、数列など、多くの数学的対象を記述することが可能である。以下では、形式的体系 P 上の不完全性定理の梗概を述べる。

3　第 1 不完全性定理

論理式の集合 K が表現可能、かつ ω -無矛盾であるとき、U と ～U のどちらも K から証明可能でないような、文命題 U が存在する。

3.1　第 1 不完全性定理の意味

上記の定理は、形式的体系 P 上の特殊な文命題の存在を主張しているが、第 1 不完全性定理は幅広い形式的体系に対して妥当する。不特定の形式的体系に対して、その主張するところを述べなおしたものを、以下に示す。

形式的体系が自己を表現可能であるとき、不完全であるか矛盾しているか、どちらかである。

ω -矛盾の概念はあとで述べるが、単に「矛盾」としても定理の成立することが、ロッサーによって示されているから、ここではとりあえず無視しておく。形式的体系の無矛盾性が予想される場合（殆んどの場合はそうである)、この定理は「形式的体系が自己を表現可能ならば不完全である」と読み換えて理解される。それでは、形式的体系が完全であるとはどのようなことか。形式的体系が以下の条件を充たすとき、形式的体系は完全であるという。

いかなる文命題 A に対しても、A と ～A のどちらかが、かならず証明可能である。

文命題とは、自然言語では「内容的意味の確定した命題」、形式的言語では「自由変数を含まない論理式」のことである。たとえば、$\xi_1 = 3$ という論理式は自由変数を含んでいるから文命題ではなく、～$\forall \xi_1(\xi_1 = 3)$ という論理式は自由変数を含まないから文命題である。また、数学の定理は全て文命題である。

第 1 不完全性定理は、自然数論における比較的単純な文命題でありながら、証明も反証もできない文命題が存在することを、すなわち形式的体系が完全ではありえないことを示した。このことは、「ヒルベルト・プログラム」の実行不可能性を示すことでもあった。ゲーデルが不完全性定理の原論文を発表した当時（1931 年)、ヒルベルトは数学の完全性と無矛盾性とを双つながらに証明する計画を推進しており、この計画はきわめて有望視されていた。ゲーデルの不完全性定理によって、彼の計画は実行不可能であることが証明されてしまった。

3.2　形式的証明

形式的体系 P において、証明とは論理式の有限列であって、以下の条件を充たすもののことをいう。すなわち、論理式の有限列 $A : A_1, A_2, \cdots, A_n$ が証明であるとは、A に出現する各論理式 A_k について、

1　A_k は公理である。

2　A_k は以前に出現した論理式から推論規則に基いて導出されている。

の、いずれかが成立していることをいう。A に出現する最後の論理式が B であるとき、A を B の証明と呼ぶ。B の証明が存在するとき、B は証明可能であるという。

同様に、形式的体系 P に論理式の集合 K を公理として追加した場合を考える。論理式の有限列 $A : A_1, A_2, \cdots, A_n$ が K からの証明であるとは、A に出現する各論理式 A_k について、

1　A_k は公理である。

2　A_k は K に元として含まれる。

3　A_k は以前に出現した論理式から推論規則に基いて導出されている。

の、いずれかが成立していることをいう。A に出現する最後の論理式が B であるとき、A を B の K -証明と呼ぶ。B の K -証明が存在するとき、B は K -証明可能であるという。

たとえば、文命題 $1 = 1$ は証明可能である。$1 = 1$ は、略記法を用いずに書けば $\forall \xi_2 (0' \in \xi_2 \to 0' \in \xi_2)$ であって、その証明 $A_1, \cdots, A_9$ が以下に示す通り存在するから。

$A_1 : (\xi_1 \in \xi_2) \to (((\xi_1 \in \xi_2) \to (\xi_1 \in \xi_2)) \to (\xi_1 \in \xi_2))$　〔∵Axiom B-1〕

$A_2 : ((\xi_1 \in \xi_2) \to (((\xi_1 \in \xi_2) \to (\xi_1 \in \xi_2)) \to (\xi_1 \in \xi_2)))$
$\quad \to (((\xi_1 \in \xi_2) \to ((\xi_1 \in \xi_2) \to (\xi_1 \in \xi_2))) \to ((\xi_1 \in \xi_2) \to (\xi_1 \in \xi_2)))$　〔∵Axiom B-2〕

$A_3 : (\xi_1 \in \xi_2) \to ((\xi_1 \in \xi_2) \to (\xi_1 \in \xi_2))$　〔∵Axiom B-1〕

$A_4 : ((\xi_1 \in \xi_2) \to ((\xi_1 \in \xi_2) \to (\xi_1 \in \xi_2))) \to ((\xi_1 \in \xi_2) \to (\xi_1 \in \xi_2))$　〔∵ A_1, A_2〕

$A_5 : (\xi_1 \in \xi_2) \to (\xi_1 \in \xi_2)$　〔∵ A_3, A_4〕

$A_6 : \forall \xi_1 ((\xi_1 \in \xi_2) \to (\xi_1 \in \xi_2))$　〔∵ A_5〕

$A_7 : \forall \xi_1 ((\xi_1 \in \xi_2) \to (\xi_1 \in \xi_2)) \to ((0' \in \xi_2) \to (0' \in \xi_2))$　〔∵Axiom C-1〕

$A_8 : (0' \in \xi_2) \to (0' \in \xi_2)$　〔∵ A_6, A_7〕

$A_9 : \forall \xi_2 ((0' \in \xi_2) \to (0' \in \xi_2))$　〔∵ A_8〕

3.3　ゲーデル数

形式的体系 P の各記号、各論理式、各証明に対して、自然数を一対一対応させることが可能である。こうすることで、たとえば「この記号の有限列は論理式である」といった超数学的命題を、「この自然数は条件 X を充たしている」といった自然数論における命題に置き換えることが可能となる。P は自然数論を形式化できるのだから、こうすれば超数学的命題は形式的命題として P の内部で表現されてしまう。なお、一対一対応が可能であるという事実は、P の論理式や P の証明が全体として可算個しかないということを示している。

1　記号のゲーデル数

0	$'$	$\in$	$\sim$	$\to$	$\forall$	(	)	ξ_n	η_n	ζ_n	$\cdots$
1	3	5	7	9	11	13	15	p_1^n	p_2^n	p_3^n	$\cdots$

但し、p_i は $15 < p$ となる素数 p の、小さい方から数えて i 番目のもの（$p_1 = 17, p_2 = 19, \cdots$）。

2　論理式（記号の有限列）のゲーデル数

記号の有限列 $S : S_1 S_2 \cdots S_n$ の、各記号 S_k のゲーデル数が g_k であるとき、S のゲーデル数 g は以下。

$$g = 2^{g_1} \cdot 3^{g_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{g_k} \cdot \cdots \cdot p_n^{g_n}$$

但し、p_i は、小さい方から数えて i 番目の素数である（$p_1 = 2, p_2 = 3, \cdots$）。

3　証明（記号の有限列の有限列）のゲーデル数

論理式の有限列 $A : A_1, A_2, \cdots, A_n$ の、各論理式 A_k のゲーデル数を g_k として、2 と同様に定義する。

たとえば、先の証明 $A_1,\cdots,A_9$ について考えてみると、A_1 のゲーデル数 g_1 は以下の通りである。

$$g_1 = 2^{13}\cdot 3^{17}\cdot 5^{5}\cdot 7^{289}\cdot 11^{15}\cdot 13^{9}\cdot 17^{13}\cdot 19^{13}\cdot 23^{13}\cdot 29^{17}\cdot 31^{5}\cdot 37^{289}\cdot 41^{15}\cdot 43^{9}$$
$$\cdot 47^{13}\cdot 53^{17}\cdot 59^{5}\cdot 61^{289}\cdot 67^{15}\cdot 71^{15}\cdot 73^{9}\cdot 79^{13}\cdot 83^{17}\cdot 89^{5}\cdot 97^{289}\cdot 101^{15}\cdot 103^{15}$$

各論理式 A_k のゲーデル数を g_k とすると、証明 $A_1,\cdots,A_9$ のゲーデル数 g は以下の通りである。

$$g = 2^{g_1}\cdot 3^{g_2}\cdot 5^{g_3}\cdot 7^{g_4}\cdot 11^{g_5}\cdot 13^{g_6}\cdot 17^{g_7}\cdot 19^{g_8}\cdot 23^{g_9}$$

こうして定義されたゲーデル数が一対一対応することは、素因数分解の一意性が保証している。

3.4　表現可能性

（数学的）自然言語において定義された、自然数の引数を取る関係、函数を、形式的体系 P の内部に正確に投射することができる場合、その関係（函数）は P で表現可能であるという。

以後は、表記の便宜のため、一貫して以下の記法を用いる。

1　形式的言語における表現を太字にして、自然言語における表現と区別する。

2　論理式 $\boldsymbol{A}$ のゲーデル数を【 $\boldsymbol{A}$ 】で表す。

3　ゲーデル数 x に対応する論理式が証明可能であることを $Bew(x)$ で表す。

関係 $R(x_1,\cdots,x_n)$ が論理式 $\boldsymbol{R(x_1,\cdots,x_n)}$ で（数値別）表現されるとは、任意の自然数 $x_1,\cdots,x_n$ に対して、

$R(x_1,\cdots,x_n) \rightarrow Bew($【 $\boldsymbol{R(x_1,\cdots,x_n)}$ 】$)$

～$R(x_1,\cdots,x_n) \rightarrow Bew($【～$\boldsymbol{R(x_1,\cdots,x_n)}$ 】$)$

が成立することをいう。関係 R を表現する論理式 $\boldsymbol{R}$ が存在することを、R は表現可能であるという。

函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ が対象式 $\boldsymbol{f(x_1,\cdots,x_n)}$ で（数値別）表現されるとは、任意の自然数 $x_1,\cdots,x_n,k$ に対して、

$f(x_1,\cdots,x_n)=k \rightarrow Bew($【 $\boldsymbol{f(x_1,\cdots,x_n)=k}$ 】$)$

が成立することをいう。函数 f を表現する対象式 $\boldsymbol{f}$ が存在することを、f は表現可能であるという。

たとえば、

$x<y \rightarrow Bew($【 $\boldsymbol{x<y}$ 】$)$

$(\sim x<y) \rightarrow Bew($【～$\boldsymbol{x<y}$ 】$)$

$x+1=y \rightarrow Bew($【 $\boldsymbol{x'=y}$ 】$)$

などが成立して、関係 $x<y$ や函数 $x+1$ が、論理式 $\boldsymbol{x<y}$ や対象式 $\boldsymbol{x'}$ で表現されることが分かる（証明略）。

3.5　超数学のプログラミング

形式的体系に対する超数学的命題の多くは、自然数に対する形式的命題に置換して、形式的体系の内部で表現することが可能である。その置き換えの作業を、ゲーデルは 46 段階に分けて遂行した（46 個のサブルーチンを定義した）。これは、あるプログラミング言語を使ってそのプログラミング言語自身の処理系をコーディングしたようなものである。しかも、彼が使ったプログラミング言語とは数学であり、彼は数学を使って数学の構造をプログラミングした。その過程で、形式的体系 P に対するさまざまな超数学的命題が、P で表現可能であることが示された。形式的体系が自己を表現可能であるとは、このようなことである。P で表現可能な超数学的命題とは、たとえば、

$\boldsymbol{Form(x)}$ ：x は論理式のゲーデル数である。

$\boldsymbol{Ax(x)}$ ：x は公理のゲーデル数である。

$\boldsymbol{B(m,x)}$ ：m は、ゲーデル数が x である命題の証明のゲーデル数である。

などである。すなわち、自然言語で記述された「x は公理のゲーデル数である」という命題が、形式的言語で記述された $\boldsymbol{Ax(x)}$ という命題に、数値別に投射されるのであって、そのことを証明できるのである。

ところで、「m は、ゲーデル数が x である命題の証明のゲーデル数である」という関係を、（数学的）自然言語で $B(m,x)$ と書くことにしよう。$B(m,x)$ が $\boldsymbol{B(m,x)}$ で表現されることを証明できる。さて、$\exists m B(m,x)$ とは $Bew(x)$ のことである。いま、$\boldsymbol{\exists m B(m,x)}$ を $\boldsymbol{Bew(x)}$ と書くことにすると、$Bew(x)$ は $\boldsymbol{Bew(x)}$ で表現されるだろうか。

第 1 不完全性定理によると、驚くべきことに、$Bew(x)$ は $\boldsymbol{Bew(x)}$ で表現されないのである。

3.6 矛盾とω-矛盾

ある論理式$\boldsymbol{A}$が存在して、$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{\sim A}$のどちらも証明可能となるとき、形式的体系は矛盾しているという。形式的体系が矛盾しているとき、全ての論理式が証明可能となることが知られている（このゆえ、矛盾した形式的体系は完全である)。逆に、形式的体系から証明できない論理式が、少なくともひとつ存在するとき、形式的体系は無矛盾であるといえる（第 1 不完全性定理は、形式的体系から証明できない論理式があることを述べているが、形式的体系から証明できないこと自体が形式的体系からは証明できないから、やはり形式的体系は自己の無矛盾性を証明できず、第 2 不完全性定理には反しない)。

ある論理式$\boldsymbol{F(x)}$が存在して、全ての自然数xに対して$\boldsymbol{F(x)}$が証明できるにもかかわらず、$\boldsymbol{\sim\forall xF(x)}$も証明できてしまうとき、形式的体系は$\omega$-矛盾しているという（但し、論理式$\boldsymbol{F(x)}$の自由変数$\boldsymbol{x}$は 1 階の変数)。

同様に、形式的体系に論理式の集合Kを公理として追加した場合を考える。ある論理式$\boldsymbol{A}$が存在して、$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{\sim A}$のどちらもK-証明可能となるとき、Kは矛盾しているという。ある論理式$\boldsymbol{F(x)}$が存在して、全ての自然数xに対して$\boldsymbol{F(x)}$がK-証明可能であるのに、$\boldsymbol{\sim\forall xF(x)}$も$K$-証明できるとき、$K$は$\omega$-矛盾しているという。

ω-矛盾は矛盾より弱い概念であり、ω-無矛盾は無矛盾より強い概念である。このことを以下で纏める。

形式的体系（K）が矛盾しているならば、形式的体系（K）はかならずω-矛盾している。

形式的体系（K）がω-矛盾していても、形式的体系（K）は矛盾しているとはかぎらない。

3.7 証明可能性

論理式の集合Kが表現可能であるとは、Kに元として含まれる論理式のゲーデル数全体の集合をκとするとき、関係$x\in\kappa$が表現可能であることをいう。

いま、「mは、ゲーデル数がxである命題のK-証明のゲーデル数である」という関係を、(数学的) 自然言語で$B_K(m,x)$と書くことにしよう。すると、次の定理が証明できる。

論理式の集合Kが表現可能であるとき、関係$B_K(m,x)$は表現可能である。

すなわち、関係$B_K(m,x)$を数値別に表現する論理式$\boldsymbol{B_K(m,x)}$が存在する。この定理は、Kが空集合の場合も含めて述べているので、$B(m,x)$が$\boldsymbol{B(m,x)}$で表現されることも保証している。

さて、$\exists mB_K(m,x)$を$Bew_K(x)$として、$\boldsymbol{\exists mB_K(m,x)}$を$\boldsymbol{Bew_K(x)}$として、それぞれ定義する。$K$が空集合の場合、$Bew_K(x)$は$Bew(x)$と一致し、$\boldsymbol{Bew_K(x)}$は$\boldsymbol{Bew(x)}$と一致する。

確認しよう。$Bew_K(x)$が$\boldsymbol{Bew_K(x)}$で表現される（このことは事実に反する）とすると、

P1 $Bew_K(x)\rightarrow Bew_K(【\boldsymbol{Bew_K(x)}】)$

P2 $\sim Bew_K(x)\rightarrow Bew_K(【\boldsymbol{\sim Bew_K(x)}】)$

が成立する筈である（$Bew(x)$なら$Bew_K(x)$であることは自明)。では、P1 と P2 のどちらが成立しないのか。

実は、次の定理が証明できる。

論理式の集合Kが表現可能、かつω-無矛盾であるとき、

$$Bew_K(x)\leftrightarrow Bew_K(【\boldsymbol{Bew_K(x)}】)$$

が成立する。

この定理は、以下の補題 L1、L2 から導出される（証明略)。

L1 論理式の集合Kが表現可能であるとき、以下が成立する。

$$Bew_K(x)\rightarrow Bew_K(【\boldsymbol{Bew_K(x)}】)$$

L2 論理式の集合Kが表現可能、かつω-無矛盾であるとき、以下が成立する。

$$Bew_K(【\boldsymbol{Bew_K(x)}】)\rightarrow Bew_K(x)$$

L1 から、P1「$Bew_K(x)\rightarrow Bew_K(【\boldsymbol{Bew_K(x)}】)$」は成立することが分かる。

成立しないのは P2「$\sim Bew_K(x)\rightarrow Bew_K(【\boldsymbol{\sim Bew_K(x)}】)$」である。

3.8　対角化定理

以下の定理を証明する。この定理を、ゲーデルの対角化定理と呼ぶ（対角線論法を利用しているため）。

1 階の変数 $\boldsymbol{x}$ のみを唯一の自由変数とする論理式 $\boldsymbol{F(x)}$ に対して、

$$\boldsymbol{A \Leftrightarrow F(【A】)}$$

となる文命題 $\boldsymbol{A}$ が存在する。

自然数型の自由変数をちょうど一個だけ有する論理式（類記号と呼ぶ）は、全体として可算個しかないから、

$$\boldsymbol{A_0(x), A_1(x), A_2(x), \cdots}$$

などとして、自然数の番号をふり、（たとえばゲーデル数が小さい順に）一列に並べることが可能である。

ここで、各 $\boldsymbol{k, x}$ の値に対する $\boldsymbol{A_k(x)}$ の値を表形式で表示する。

$$\boldsymbol{A_k(x)} = \left\{ \begin{array}{c|cccccc} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \cdots & \boldsymbol{x} & \cdots \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A_0(0)} & \boldsymbol{A_0(1)} & \cdots & \boldsymbol{A_0(x)} & \cdots \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{A_1(0)} & \boldsymbol{A_1(1)} & \cdots & \boldsymbol{A_1(x)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \boldsymbol{k} & \boldsymbol{A_k(0)} & \boldsymbol{A_k(1)} & \cdots & \boldsymbol{A_k(x)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array} \right\}$$

ところで、ある類記号 $\boldsymbol{F(x)}$ に対して、自然数 n を添字とする類記号 $\boldsymbol{A_n(x)}$ が存在して、

$$\boldsymbol{A_n(x) \Leftrightarrow F(【A_x(x)】)}$$

となる筈である（なぜなら、$\boldsymbol{F(【A_x(x)】)}$ は $\boldsymbol{x}$ を自由変数とする類記号なので、この列に出現している筈だから）。$\boldsymbol{A_x(x)}$ は、上掲表の対角線上の値を拾いあげたものに相当する。

ここで、$\boldsymbol{A_n(x)}$ の $\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{n}$ を代入すると、類記号 $\boldsymbol{A_n(x)}$ は文命題 $\boldsymbol{A_n(n)}$ となり、

$$\boldsymbol{A_n(n) \Leftrightarrow F(【A_n(n)】)}$$

が成立する。この文命題 $\boldsymbol{A_n(n)}$ を $\boldsymbol{A}$ とおけば、

$$\boldsymbol{A \Leftrightarrow F(【A】)}$$

となるから、定理は証明される。

文命題 $\boldsymbol{A}$ は、内容的意味として「この文命題のゲーデル数は条件 $\boldsymbol{F}$ を充たす」ということを主張する。つまり、文命題 $\boldsymbol{A}$ は自己言及文になっている。

3.9　第 1 不完全性定理（ゲーデル文）

ゲーデルの対角化定理によると、以下の条件を充たす文命題 $\boldsymbol{U}$ が存在する。

D1　$\boldsymbol{U \Leftrightarrow \sim Bew_K(【U】)}$

この文命題 $\boldsymbol{U}$ をゲーデル文と呼ぶ。文命題 $\boldsymbol{U}$ に対して、以下の定理が成立する。

論理式の集合 K が表現可能、かつ ω -無矛盾であるとき、$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{\sim U}$ はどちらも K から証明可能ではない。

L3　論理式の集合 K が表現可能、かつ無矛盾であるとき、$\boldsymbol{U}$ は K から証明できない。

$Bew_K(【\boldsymbol{U}】) \to Bew_K(【\boldsymbol{Bew_K(【U】)}】) \to Bew_K(【\boldsymbol{\sim U}】)$ 〔∵L1、D1〕

$\boldsymbol{U}$ の K -証明が存在すると、$\boldsymbol{\sim U}$ の K -証明も存在して、K は矛盾するが、これは仮定に反する。

L4　論理式の集合 K が表現可能、かつ ω -無矛盾であるとき、$\boldsymbol{\sim U}$ は K から証明できない。

$Bew_K(【\boldsymbol{\sim U}】) \to Bew_K(【\boldsymbol{Bew_K(【U】)}】) \to Bew_K(【\boldsymbol{U}】)$ 〔∵D1、L2〕

$\boldsymbol{\sim U}$ の K -証明が存在すると、$\boldsymbol{U}$ の K -証明も存在して、K は矛盾するが、これは仮定に反する。

以上から、ゲーデルの第 1 不完全性定理が成立する。

ここで $\sim Bew_K(【\boldsymbol{U}】)$ である〔∵L3〕が、$\boldsymbol{\sim Bew_K(【U】)}$ であることは K から証明できない。このことは、$Bew_K(x)$ が $\boldsymbol{Bew_K(x)}$ で表現されないことを示している。

3.10　タルスキーの定理

どんな文命題 $\boldsymbol{A}$ に対しても

$$\boldsymbol{A \Leftrightarrow True(【A】)}$$

となる、1 階の変数 $\boldsymbol{x}$ のみを唯一の自由変数とする論理式 $\boldsymbol{True(x)}$ は存在しない。

$\boldsymbol{True(x)}$ は、内容的意味として「ゲーデル数が x である文命題は真である」ということを主張する。$\boldsymbol{True(x)}$ が存在しないということは、形式的体系の中で真偽の定義を与えられないということを示している。

3.11　ロッサーの不完全性定理

論理式の集合 K が表現可能、かつ無矛盾であるとき、$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{\sim U}$ のどちらも K から証明可能でないような、文命題 $\boldsymbol{U}$ が存在する。

この定理を証明するには、以下で定義される $B_K^*(m,x)$ が表現可能であることを利用する。

$$B_K^*(m,【A】) \leftrightarrow \{B_K(m,【A】) \wedge \forall k(k \le m \rightarrow \sim B_K(k,【\sim A】))\}$$

形式的体系が無矛盾であるかぎり $B_K^*(m,x) \leftrightarrow B_K(m,x)$ となる。$B_K^*(m,x)$ は表現可能だから、$B_K^*(m,x)$ を表現する $\boldsymbol{B_K^*(m,x)}$ が存在する。ここで $\boldsymbol{\exists m B_K^*(m,x)}$ を $\boldsymbol{Bew_K^*(x)}$ と書くことにすると、

D2　$\boldsymbol{U \Leftrightarrow \sim Bew_K^*(【U】)}$

となる文命題 $\boldsymbol{U}$ に対して不完全性定理が成立する。この場合、ω -無矛盾性は要求されない。

4　第 2 不完全性定理

論理式の集合 K が強い意味で表現可能、かつ無矛盾であるとき、K の無矛盾性は K から証明できない。

4.1　証明の方針

$\boldsymbol{Consis(K)}$ を $\boldsymbol{\sim \exists【A】\{Bew_K(【A】) \wedge Bew_K(【\sim A】)\}}$ として定義。

第 1 不完全性定理は自然言語で証明された。第 1 不完全性定理を形式的言語で証明すると、

T1　$\boldsymbol{Consis(K) \rightarrow \sim Bew_K(【U】)}$〔形式的第 1 不完全性定理〕

が証明できる筈である。$Bew_K(【\boldsymbol{Consis(K)}】)$ であるとすると、

$Bew_K(【\boldsymbol{Consis(K)}】) \rightarrow Bew_K(【\boldsymbol{\sim Bew_K(【U】)}】) \rightarrow Bew_K(【\boldsymbol{U}】)$〔∵T1、D1〕

となるから、$\boldsymbol{U}$ が K -証明できてしまい、L3 に反する（自己の無矛盾性証明が可能な体系は矛盾している)。

関係 R が表現可能であることが表現可能であるとき、R は強い意味で表現可能であるという。

4.2　クライゼルの注意

P3　$\boldsymbol{\sim Bew_K(【1=0】)}$

P4　$\boldsymbol{\sim Bew_K^*(【1=0】)}$

P3 が K -証明できてしまうと、$\boldsymbol{Consis(K)}$ が K -証明できてしまうため、P3 は K -証明できない。

一方、P4 は常に証明可能であることを、クライゼルが指摘した。

$\boldsymbol{Bew_K(x)}$ も $\boldsymbol{Bew_K^*(x)}$ も $Bew_K(x)$ を正確に表現することはできない。であれば、$\boldsymbol{\sim Bew_K^*(【1=0】)}$ が証明可能であることをもって、これを形式的体系の無矛盾性証明であると考えることもできなくはない。

なお、$Bew_K(x) \leftrightarrow Bew_K^*(x)$ であるが、$\boldsymbol{Bew_K(x) \Leftrightarrow Bew_K^*(x)}$ であることを形式的体系から証明することはできない。ゆえに、クライゼルの注意は第 2 不完全性定理には反しない。

**References*

[1] 前原昭二『数学基礎論入門』朝倉書店、1977 年

[2] ゲーデル『不完全性定理』林晋；八杉満利子［訳・解説]、岩波文庫、2006 年