2009 年 9 月 12 日　第 1 回京都数学研究会（レジュメ作成：TaniR）

テーマ： 巨大数論①

【定義】クヌースの矢印表記 Knuth's up-arrow notation（タワー函数 power tower）

$\alpha \uparrow^n \beta = \alpha \uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow \beta$ （n は右辺に現れる$\uparrow$の数）

$\alpha \uparrow^1 \beta = \alpha^\beta$

$\alpha \uparrow^{n+1} \beta = \alpha \uparrow^n \alpha \uparrow^n \alpha \uparrow^n \cdots \uparrow^n \alpha$ （β は右辺に現れる α の数）

※但し $0 \le \alpha, 1 \le n, 2 \le \beta$ とする。

【定義】ハイパー演算子 hyper operator

$hyper(\alpha, n, \beta) = hyper[n](\alpha, \beta) = \alpha^{(n)}\beta$

$hyper(\alpha, 1, \beta) = \alpha + \beta$

$hyper(\alpha, n+1, \beta) = hyper(\alpha, n, hyper(\alpha, n, hyper(\cdots hyper(\alpha, n, \alpha)\cdots)))$（$\beta$ は右辺に現れる α の数）

※但し $0 \le \alpha, 1 \le n, 2 \le \beta$ とする。

【公式】矢印表記⇔ハイパー演算子　（⇔乙種アッカーマン函数 $= ac(\alpha, \beta, n+1)$）

$\alpha \uparrow^n \beta = hyper(\alpha, n+2, \beta)$

【定義】合成函数（合成写像も同様に定義する）

$f^n(x) = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f(x) = f(f(f(\cdots f(x)\cdots)))$ （n は f の数）

【定義】グラハム数 Graham's number（G）

$G(x) = 3 \uparrow^x 3$

$G = G^{64}(4)$

【定義】アッカーマン函数 Ackermann function（甲種）

$Ack(0, n) = n + 1$

$Ack(m+1, 0) = Ack(m, 1)$

$Ack(m+1, n+1) = Ack(m, Ack(m+1, n))$

【公式】アッカーマン函数⇔矢印表記⇔ハイパー演算子（証明は次頁）

$Ack(m, n) = 2 \uparrow^{m-2} (n+3) - 3 = hyper(2, m, n+3) - 3$

【練習問題】

問 1　こころみに $Ack(2,3)$ を、公式を利用せず計算してみよ。

問 2　アッカーマン函数の計算が、無限の表を用いた手順と等価であることを理解せよ。（Wikipedia 参照のこと）

問 3　次の計算をせよ。

$$\frac{hyper(G(hyper(1,1,2) - Ack(0,1)) - Ack(3,0) \uparrow^1 2, 3, 4)}{(Ack(3,4) - hyper(71, 1, hyper(4, 2, Ack(4,0)))) \uparrow^2 3}$$

★公式 $Ack(m,n) = hyper(2,m,n+3) - 3$ の証明

数学的帰納法を用いる（以下で「自然数」には 0 を含めない）。

命題 $P(k)$ を

$$P(k) : Ack(k,n) = hyper(2,k,n+3) - 3$$

と置く。

$$Ack(1,n) = Ack(0, Ack(0, Ack(\cdots Ack(1,0)\cdots))) = n+2$$

であり、

$$hyper(2,1,n+3) - 3 = 2 + (n+3) - 3 = n+2$$

であるから、

$$P(1) : Ack(1,n) = hyper(2,1,n+3) - 3$$

は正しい。

いま、任意の自然数 k をとり、$P(k)$ が正しいと仮定する。

$$Ack(k+1,n)$$
$$= Ack(k, Ack(k, Ack(\cdots Ack(k+1,0)\cdots)))$$

$P(k)$ より、

$$= hyper(2,k,hyper(2,k,hyper(\cdots hyper(2,k+1,3)\cdots) - 3 + 3) - 3 + 3) - 3$$
$$= hyper(2,k,hyper(2,k,hyper(\cdots hyper(2,k+1,3)\cdots))) - 3$$
$$= hyper(2,k,hyper(2,k,hyper(\cdots hyper(2,k,hyper(2,k,2))\cdots))) - 3$$

定義より、

$$= hyper(2,k+1,n+3) - 3$$

となり、

$$P(k+1) : Ack(k+1,n) = hyper(2,k+1,n+3) - 3$$

が成立する。

以上から、数学的帰納法により、任意の自然数 n に対して命題 $P(n)$ が成立する。（Q.E.D.）

★ $Ack(2,3)$ の具体的計算

Ack(2, 3)
＝Ack(1, Ack(2, 2))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(2, 1)))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(1, Ack(2, 0))))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(1, Ack(1, 1))))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(1, Ack(0, Ack(1, 0)))))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(1, Ack(0, Ack(0, 1)))))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(1, Ack(0, 2))))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(1, 3)))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(0, Ack(1, 2))))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(1, 1)))))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(1, 0))))))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, 1))))))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(0, 2)))))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(0, Ack(0, 3))))
＝Ack(1, Ack(1, Ack(0, 4)))
＝Ack(1, Ack(1, 5))
＝Ack(1, Ack(0, Ack(1, 4)))
＝Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(1, 3))))
＝Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(1, 2)))))
＝Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(1, 1))))))
＝Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(1, 0)))))))
＝Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, 1)))))))
＝Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, 2))))))
＝Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, 3)))))
＝Ack(1, Ack(0, Ack(0, Ack(0, 4))))
＝Ack(1, Ack(0, Ack(0, 5)))
＝Ack(1, Ack(0, 6))
＝Ack(1, 7)
＝Ack(0, Ack(1, 6))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(1, 5)))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(1, 4))))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(1, 3)))))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(1, 2))))))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(1, 1)))))))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(1, 0))))))))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, 1))))))))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, 2)))))))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, 3))))))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, 4)))))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(0, Ack(0, 5))))
＝Ack(0, Ack(0, Ack(0, 6)))
＝Ack(0, Ack(0, 7))
＝Ack(0, 8)
＝9（再帰処理回数：44 回）

≪アッカーマン函数の計算の実際≫

$$Ack(m,n) = Ack(m-1, Ack(m-1, Ack(\cdots Ack(m-1, Ack(m,0))\cdots)))$$（n は右辺に現れる $m-1$ の数）

$$Ack(m,0) = Ack(m-2, Ack(m-3, Ack(m-4, Ack(\cdots Ack(1, Ack(0, Ack(0,1)))\cdots))))$$

以上を纏めると、

$$Ack(m,n) = Ack(m-1, Ack(m-1, Ack(\cdots Ack(m-2, Ack(m-3, Ack(\cdots Ack(1, Ack(0,2))\cdots)))\cdots)))$$

となり、あとは nest の内から順番に解決してゆけばよい。

※アッカーマン函数は、原始帰納的でない帰納的函数である。すなわち、プログラミングにおいて、帰納的定義を用いずに loop 構造だけで表現することが不可能な函数である。

【定義】ふぃっしゅ数バージョン１　Fish number ver.1（F_1）

1°　$S : [m, f(x)] \to [g(m), g(x)] \quad m, g(m) \in N$

$$B(0,n) = f(n)$$
$$B(m+1,0) = B(m,1)$$
$$B(m+1,n+1) = B(m, B(m+1,n))$$
$$g(x) = B(x,x)$$

2°　$SS : [m, f(x), S] \to [n, g(x), S'] \quad m, n \in N$

$$S' = S^{f(m)}$$
$$S' : [m, f(x)] \to [n, g(x)]$$

3°　$SS^{63} : [3, x+1, S] \to [F_1, F_1(x), S']$

【練習問題】

問４　$(3, x+1)$ を S 変換するとき、えられる自然数と函数を述べよ。

問５　$(3, x+1)$ を何回 S 変換すれば、えられる自然数はグラハム数より大きくなるのだろうか。

【自由研究】

アッカーマン函数の再帰処理回数について研究すること。

また、竹内函数（たらいまわし函数）の再帰処理回数などとも比較してみること。